Die Formelsammlung: Meine Mathematische Werkzeugkiste

1. Rechenvorteile, Rechengesetze

Formel, Skizze	Formel, Skizze	Beispiel(e)
Summand 12 plus Summand 34 ist gleich dem Wert der Summe: 46.	*Alle Summanden addieren bestimmt den WERT einer Summe.*	$12 + 34 = 46$
Minuend 10 minus Subtrahend 7 ist gleich dem Wert der Differenz: 3	*Vom Minuenden den Subtrahenden abziehen bestimmt den WERT einer Differenz.*	$10 - 7 = 3$
Dividend 10 geteilt durch Divisor 4 ist gleich der Wert des Quotienten: 2,5	*Beide Zahlen dividieren bestimmt den WERT des Quotienten.*	$10 : 4 = 2{,}5$
Faktor 20 mal Faktor 3,5 ist gleich der Wert des Produkts: 70	*Alle Faktoren multiplizieren bestimmt den WERT eines Produkts.*	$20 \cdot 3{,}5 = 70$
$a + z + b = a + b + z$	*Summanden können bei ihrer Berechnung beliebig vertauscht werden. Dies ist die Tauscherlaubnis beim Addieren und der Fachausdruck lautet KOMMUTATIVGESETZ für Summen.*	$3{,}2 + 143 + 0{,}8$ $= 3{,}2 + 0{,}8 + 143$ $= 4 + 143 = 147$
$a \cdot z \cdot b = a \cdot b \cdot z$	*Faktoren können bei ihrer Berechnung beliebig vertauscht werden. Dies ist die Tauscherlaubnis beim Multiplizieren oder auch das KOMMUTATIVGESETZ bei Produkten.*	$5 \cdot 4{,}3 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 4{,}3$ $= 10 \cdot 4{,}3 = 43$
$(z+a)+b = z+(a+b)$	*Summanden können bei ihrer Berechnung beliebig vorgezogen werden. Dies ist die Vorzieherlaubnis beim Addieren und der Fachausdruck lautet ASSOZIATIVGESETZ für Summen.*	$(1{,}56+2{,}2) + 0{,}8$ $= 1{,}56 + (2{,}2+ 0{,}8)$ $= 1{,}56 + 3 = 4{,}56$
$(z \cdot a) \cdot b = z \cdot (a \cdot b)$	*Bestimmte Faktoren können bei ihrer Berechnung beliebig vorgezogen werden. Dies ist die Vorzieherlaubnis beim Multiplizieren oder auch das ASSOZIATIVGESETZ bei Produkten.*	$(3{,}2 \cdot 2{,}5) \cdot 4 = 3{,}2 \cdot (2{,}5 \cdot 4)$ $= 3{,}2 \cdot 10 = 32$
$a(x + y) = ax + ay$ *oder auch:* $a(x+y+z) = ax+ay+az$	*Ein Produkt, bei dem ein Faktor eine Zahl oder Variable a ist und der andere Faktor eine Summe (x+y) ist, darf wie folgt 'ausgepackt' geschrieben werden: Der Faktor a wird mit jedem Summanden in der Klammer multipliziert. Dieses 'Auspacken' heißt AUSMULTIPLIZIEREN.*	$4{,}1 \cdot (10 + 2) = 4{,}1 \cdot 10 + 4{,}1 \cdot 2$ $= 41 + 8{,}2 = 49{,}2$ oder: $1{,}5 \cdot (20+2+0{,}01)$ $= 1{,}5 \cdot 20 + 1{,}5 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 0{,}01 = 33{,}15$
$ax + az = a(x + z)$ *und sogar auch:* $ax+ay-az = a(x+y-z)$	*Eine Summe, deren Summanden die Produkte der Form ax und ay aufweisen dürfen auch 'eingepackt' geschrieben werden: Der Faktor a wird jeweils vor die Klammer geschrieben und in der Klammer bleibt die Summe x+y. Dieses in Klammern 'Packen' heißt AUSKLAMMERN.*	$3{,}6 \cdot 5{,}3 + 3{,}6 \cdot 4{,}7$ $= 3{,}6 \cdot (5{,}3+4{,}7)$ oder: $9{,}9 \cdot 1{,}1 + 9{,}9 \cdot 3{,}1 - 9{,}9 \cdot 2{,}2$ $= 9{,}9(1{,}1+3{,}1-2{,}2) = 9{,}9 \cdot 2$

Die Formelsammlung: Meine Mathematische Werkzeugkiste

Formel, Skizze	Formel, Skizze	Beispiel(e)

2. Brüche

$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a\cdot x}{b\cdot y}$	*Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner berechnet das PRODUKT (die Multiplikation) von zwei Brüchen.*	$\frac{3}{4}\cdot\frac{11}{13}=\frac{3\cdot 11}{4\cdot 13}=\frac{33}{52}$
$\frac{a}{b}+\frac{x}{y}=\frac{a\cdot y}{b\cdot y}+\frac{b\cdot x}{b\cdot y}$	*Beide Nenner zunächst gleichnamig machen, die neuen Zähler addieren, doch den gleichnamigen Nenner übernehmen berechnet die SUMME (die Addition) von zwei Brüchen.*	$\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 3}{7\cdot 3}+\frac{2\cdot 7}{7\cdot 3}=\frac{9}{21}+\frac{14}{21}=\frac{23}{21}$
$\frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\cdot\frac{y}{x}=\frac{a\cdot y}{b\cdot x}$	*Vom zweiten Bruch den Kehrwert bilden, nun aber diesen neuen zweiten Bruch mit dem ersten Bruch multiplizieren berechnet die DIVISION (den Quotienten) von zwei Brüchen.*	$\frac{8}{3}:\frac{5}{2}=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16}{15}=1\frac{1}{15}$

3. Quadratwurzeln

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{z}=\sqrt{a\cdot b\cdot z}$	*Mehrere Radikanden innerhalb eines Wurzelzeichens multipliziert ist die geschickte Umformung eines PRODUKTS von Wurzeln.*	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{2\cdot 5\cdot 10}=10$
$\sqrt{a}+2\cdot\sqrt{a}+3\cdot\sqrt{a}$ $=(1+2+3)\sqrt{a}$ $=6\cdot\sqrt{a}$	*Gleiche Wurzeln, die sich in ihrer Häufigkeit unterscheiden dürfen, kann man durch Ausklammern geschickter schreiben. Gleiche Wurzeln darf stets man so ZUSAMMENFASSEN.*	$\sqrt{8}+\sqrt{8}+\sqrt{8}=3\sqrt{8}$ $5\sqrt{7}+2\sqrt{7}=9\sqrt{7}$ $7\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
$\sqrt{x}=z \quad mit\ z^2=x$	*Gesucht ist diejenige positive Zahl z, die quadriert (z²) genau den Radikanden innerhalb der Wurzel ergibt. Diesen Vorgang nennt man WURZELZIEHEN (oder Radizieren).*	$\sqrt{36}=6$ $\sqrt{49x^2}=7x$
$\sqrt[3]{x}=z \quad mit\ z^3=x$	*Gesucht ist diejenige positive Zahl z, die dreimal mit sich selbst multipliziert (z³) den Radikanden innerhalb der Wurzel ergibt. Diesen Vorgang nennt man das Ziehen DER DRITTEN WURZEL (Kubikwurzel).*	$\sqrt[3]{64}=4$ $\sqrt[3]{8x^3}=2x$
$\sqrt{x^2 z}=x\cdot\sqrt{z}$	*Findet man in der Produktform des Radikanden einer Quadratwurzel eine Quadratzahl oder eine quadrierte Variable, so kann man diese vor die Wurzel ziehen. Diesen Vorgang nennt man TEILWEISE WURZELZIEHEN.*	$\sqrt{75x^2y}=\sqrt{25x^2\cdot 3y}$ $=5x\sqrt{3y}$

4. Mittelwerte

$m=\frac{Summe\ der\ Werte}{Anzahl\ der\ Werte}$	*Alle Zahlen addieren (ihre Summe) und durch ihre Anzahl dividieren bestimmt den MITTELWERT m.*	$m=\frac{2+4+5+5}{4}=\frac{16}{4}=4$

Die Formelsammlung: Meine Mathematische Werkzeugkiste

Formel, Skizze	***Formel, Skizze***	**Beispiel(e)**

5. Flächeninhalte von Figuren

$A = m \cdot \mathrm{h}$ *oder* $\mathrm{A} = ½ (\mathrm{a}+\mathrm{c}) \cdot \mathrm{h}$	*Der Mittelwert m (Länge der Mittelparallele m) der beiden parallelen Seiten a und c, multipliziert mit der Höhe h bestimmt den FLÄCHENINHALT A eines Trapezes.*	A= ½ (4+6)·7 cm² = 35cm²
$A = a \cdot h_a$	*Die Länge einer Seite a mal zugehörige Höhe ha bestimmt den FLÄCHENINHALT A eines Parallelogramms.*	A = 4·4,5 cm² = 18 cm²
$A = ½ \cdot g \cdot h$	*Die halbe Länge der Grundseite g mal der zugehörigen Höhe h bestimmt den FLÄCHENINHALT A eines Dreiecks.*	A = ½·7·8 cm² = 28 cm²
$u = a+b+c$	*Die Länge der drei Seiten a, b, c addiert bestimmt den UMFANG u eines Dreiecks.*	u = (2+3+4)cm= 9cm
$A = a \cdot b$	*Die Länge a mal Breite b ergibt den FLÄCHENINHALT A eines Rechtecks.*	*A = 4* · 3,5 cm² = 14 cm²
$A = a^2$	*Das Quadrat der beiden gleich langen Seiten:____ ergibt den FLÄCHENINHALT A eines Quadrats.*	A = 1,5² cm² = 2,25 cm²

6. Binomische Formeln

$(a+b)(x+y) =$ $ax+ay+bx+by$	*Das Produkt zweier Summen (a+b)(x+y) lässt sich nach dem Prinzip 'jeden Summand vom 1.Faktor mal jeden Summand vom 2. Faktor' in eine SUMME umformen.*	(5+x)(3+z) = 15+5z+3x+xz (4-a)(7-a) = 28-4a-7a+a² = 28 – 11a + a²
$(a+z)^2=a^2+2az+z^2$	*Der Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge a, dessen beide Seiten man um z verlängert, kann auch in Summenform als a² plus dem verdoppelten Produkt von a und z und plus z² schreiben. Dies ist die 1. BINOMISCHE Formel.*	(4+x)² = 4² + 2·4·x +x² = 16 + 8x + x²
$(a-z)^2 = a^2–2az+z^2$	*Der Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge a, dessen beide Seiten man um z verkürzt, kann man auch in Summenform als a² minus dem verdoppelten Produkt von a und z und plus z² schreiben. Dieses verkleinerte Quadrat ist die Anschauung für die 2. BINOMISCHE Formel.*	(5–3y)² = 5²–2·5·3y +3²y² = 25 – 30y + 9y²
$(a+z)(a-z) = a^2–z^2$	*Der Flächeninhalt eines Quadrats mit Seitenlänge a, dessen eine Seiten man um z verkürzt und die andere um z verlängert, kann auch additiv als a² minus z² geschrieben werden. Der Flächeninhalt des sich jetzt ergebenden Rechtecks ergibt sich aus de 3. BINOMISCHE Formel.*	(7–3*x*)(7+3x) = 7² – 3²x² = 49 – 9x²

Formel, Skizze	Formel, Skizze	Beispiel(e)

7. Prozent und Zinsrechnung

$W = G \cdot p\%$	*Der Grundwert ___ mal dem Prozentsatz ___ bestimmt den PROZENTWERT W.*	$W = 75\ € \cdot 10\% = 7{,}50\ €$
$q = 1 + p\%$	*Die Zahl 1 plus dem Prozentsatz ____ bestimmt den VERÄNDERUNGSFAKTOR q für den vermehrten Grundwert G+.*	q=1+5%=1,05
$q = 1 – p\%$	*Die Zahl 1 minus dem Prozentsatz ____ bestimmt den VERÄNDERUNGSFAKTOR q für den verminderten Grundwert G–..*	q=1-7%= 0,93
$Z = K \cdot p\%$	*Das Kapital ___ multipliziert mit dem Zinssatz ___ bestimmt den Betrag der ZINSEN Z für das ganze Jahr.*	$Z = 12000\ € \cdot 2\%$ $Z = 12000\ € \cdot 2 : 100$ $Z = 240\ €$
$K_n=K_0\cdot q_1\cdot q_2\cdot q_3 \ldots\cdot q_n$	*Das Anfangskapital ___, multipliziert mit den verschiedenen Wachstumsfaktoren ___________ ergibt das ENDKAPITAL Kn beim Zuwachssparen.*	$K_n = 80\ €\cdot 1{,}0125\cdot 1{,}05\cdot 1{,}2$ $K_n = 102{,}06\ €$
$K_n = K_0 \cdot q^n$	*Das Anfangskapital ____, multipliziert mit dem mit hoch n potenzierten Wachstumsfaktor _____ (n ist die Anzahl der Jahre), ergibt das ENDKAPITAL Kn und dies ist die Zinseszinsformel.*	$K_n = 1000\ € \cdot 1{,}05^8$ $K_n = 1477{,}46\ €$
$u = 4a$	*Die gesamte Länge der 4 gleich langen Seiten ergibt den UMFANG u eines (einer) Quadrats (Raute).*	$u = 4 \cdot 3$ cm = 12 cm
$G^+ = G \cdot q$ $G^– = G \cdot q$	*Ein Grundwert ___ mal seinem Veränderungsfaktor ___ bestimmt den VERMEHRTEN oder verminderten Grundwert G+ bzw. G–.*	$G^+ = 100 \cdot 1{,}1 = 110\ €$ $G^– = 100 \cdot 0{,}9 = 90\ €$
$Z = K\cdot p\%\cdot t/360$	*Das Kapital ___ multipliziert mit dem Zinssatz ___ multipliziert mit dem Bruch des Zeitfaktors (Taganzahl / 360) bestimmt die TAGESZINSEN Z.*	$Z = 720\ €\cdot 2\% \cdot 40/360$ $Z = 1{,}60\ €$

8. Kreisflächen

$A = \pi r^2$	*Die Kreiszahl ____ multipliziert mit dem quadrierten Radius ___, ergibt den FLÄCHENINHALT A eines Kreises.*	$A=\pi\cdot 4^2$ cm²= $\pi\cdot 16$ cm² $A \approx 3{,}14\cdot 16$ cm²= 50,24 cm²
$u = \pi d$ $u = 2 \pi r$	*Die Kreiszahl ____ mal dem Durchmesser ___ ergibt den UMFANG u eines Kreises.*	$u = \pi\ 4$ cm $u \approx 3{,}14\cdot 4$ cm = 12,56 cm

Formel, Skizze	Formel, Skizze	Beispiel(e)

9. Volumen und Oberfläche von Körpern

$V = a^3$ oder $V = a \cdot a \cdot a$	*Länge, Breite und Höhe dieses Körpers sind gleich groß, daher bestimmt man aus der Seitenlänge a hoch drei (dreimal die Seitenlänge a multiplizieren) das VOLUMEN V eines Würfels.*	$V = 11 \cdot 11 \cdot 11\ cm^3$ $V = 1331\ cm^3$
$O = 6\ a^2$	*Das 6-fache der quadrierten Kantenlänge: ____ bestimmt die OBERFLÄCHE O eines Würfels.*	$O = 6 \cdot 4^2\ cm^2 = 96\ cm^2$
$V = a \cdot b \cdot c$	*Länge a mal Breite b mal Höhe c bestimmt das VOLUMEN V eines Quaders.*	$V = 4 \cdot 2{,}5 \cdot 3{,}5\ cm^3 = 35\ cm^3$
$O=2(a \cdot b+a \cdot c+b \cdot c)$	*Die Summe aller drei Einzelprodukte der drei Seitenlängen a, b und c (also: ab+ac+bc), das alles nochmal verdoppelt bestimmt die OBERFLÄCHE O eines Quaders.*	$O = 2 \cdot (2 \cdot 3+2 \cdot 4+3 \cdot 4) cm^2$ $O = 52\ cm^2$
$V= \pi \cdot r^2 \cdot h$	*Die Kreiszahl __ multipliziert mit dem quadrierten Radius __, multipliziert mit der Höhe __ ergibt das VOLUMEN V eines Zylinders.*	$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 10\ cm^3 = 160 \cdot \pi\ cm^3$ $V \approx 160 \cdot 3{,}14\ cm^3 = 502{,}4\ cm^3$
$O= 2\pi \cdot r^2 +2\pi \cdot r \cdot h$	*Die Grundfläche und Deckfläche dieses Körpers ist kreisförmig. Die verdoppelte Kreiszahl ____ multipliziert mit dem quadrierten Radius ___ bestimmt beider Flächeninhalt. Addiert man noch die Mantelfläche als verdoppelte Kreiszahl ___ multipliziert mit dem Radius r und der Körperhöhe h erhält man die OBERFLÄCHE O eines Zylinders.*	$O = 2\pi \cdot 3{,}5^2\ cm^2 + 2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10\ cm^2$ $O = 24{,}5\pi\ cm^2 +70\pi\ cm^2$ $O = 94{,}5\pi\ cm^2$ $O \approx 94{,}5 \cdot 3{,}14\ cm^2 = 296{,}73\ cm^2$
$V= \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$	*Die gedrittelte Kreiszahl ____ multipliziert mit dem quadrierten Radius ___, multipliziert mit der Höhe ___ ergibt das VOLUMEN V eines Kegels.*	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 10\ cm^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 90\ cm^3$ $V \approx 30 \cdot 3{,}14\ cm^3 = 94{,}2\ cm^3$
$O= \pi \cdot r^2 +\pi \cdot r \cdot s$	*Die Grundfläche dieses Körpers ist kreisförmig. Die Kreiszahl ____, multipliziert mit dem quadrierten Radius ___ ist der Flächeninhalt der Grundfläche. Addiert man noch die Mantelfläche durch Kreiszahl ___ multipliziert mit dem Radius r und der Seitenlinie s erhält man die OBERFLÄCHE O eines Kegels.*	$O = \pi \cdot 6^2\ cm^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10\ cm^2$ $= 36\pi\ cm^2 + 60\pi\ cm^2 = 96\pi\ cm^2$ $O \approx 96 \cdot 3{,}14\ cm^2 = 301{,}44\ cm^2$
$V= 4/3\ \pi \cdot r^3$	*Die mit dem Bruch 4/3 multiplizierte Kreiszahl: ____ , dreimal multipliziert mit dem Radius _____ (bzw. Radius hoch drei: ___) ergibt das VOLUMEN V einer Kugel.*	$V = 4/3\ \pi \cdot 3^3\ cm^3 = 4/3 \cdot \pi \cdot 27\ cm^3$ $V \approx 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9\ cm^3 = 113{,}04\ cm^3$
$V= 4\ \pi \cdot r^2$	*Die 4fache Kreiszahl ___, multipliziert mit dem quadrierten Radius __ ergibt die OBERFLÄCHE O einer Kugel.*	$V = 4\pi \cdot 5^2\ cm^2= 100 \cdot \pi\ cm^2$ $V \approx 4 \cdot 3{,}14 \cdot 25\ cm^2 = 314\ cm^2$
$V= \frac{1}{3}\ a^2 \cdot h$	*Bei diesem Körper ist die Grundfläche quadratisch. Der dritte Teil der quadrierten Seitenlänge: ⅓____ multipliziert mit der Höhe __ ergibt das VOLUMEN V einer quadratischen Pyramide.*	$V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 12\ cm^3$ $V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 12\ cm^3$ $V = 100\ cm^3$
$O= a^2 +2 \cdot a \cdot h_s$	*Die Grundfläche dieses Körpers ist quadratisch. Die quadrierte Seitenlänge ____ addiert mit der mit verVIERfachten Fläche einer einzelnen Dreieckseite (halbe Grundseite a mal Höhe hs), also _________ ergibt die OBERFLÄCHE O einer quadratischen Pyramide.*	$O = 5^2\ cm^2 + 2 \cdot 5 \cdot 10\ cm^2$ $O = 25\ cm^2 + 100\ cm^3$ $O = 125\ cm^3$

Name: ___________________